Taller N°1
Finanzas II

Profesor: Jaime Bastías.
Ayudantes: Christian González Ibarra & Nicolás Allende

Matemático 1

Un individuo posee una función de utilidad del estilo: $U(C_0, C_1) = C_0^{\alpha} \cdot C_1^{\beta}$; con β y $\alpha > 0$. Las posibilidades de producción de inversión para el periodo 1 vienen de $F_1 = A \cdot I_0^{\gamma}$; con A y $\gamma > 0$, la tasa de mercado es r y se posee una dotación inicial de DI.

a) ¿Cuál es la inversión y el consumo óptimo I_0^*, C_0^*, C_1^*? (2 pts).

Respuesta

Para empezar lo primero que debemos hacer es encontrar el nivel óptimo de inversión que hará el individuo, para lo cual tenemos que igualar el retorno de una unidad más de inversión con la tasa marginal técnica de sustitución que nos entrega el mercado:

$$\frac{\partial F_1}{\partial I_0}|_{I_0^*} = 1 + r \longrightarrow A \cdot \gamma \cdot I_0^{\gamma - 1} = 1 + r$$

$$\longleftrightarrow I_0^{1-\gamma} = \left(\frac{A \cdot \gamma}{1+r}\right)$$

$$\boxed{\therefore \quad I_0^* = \left(\frac{A \cdot \gamma}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}} \quad 0,5 pts. \tag{1}$$

Teniendo la inversión óptima podemos encontrar el flujo F_1 óptimo, para lo cual reemplazamos la ecuación 1 en la función F_1 llegando a:

$$F_1^* = A \cdot I_0^{*\gamma} = A \cdot \left(\frac{A \cdot \gamma}{1+r}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

$$\boxed{\therefore \quad F_1^* = A^{\frac{1}{1-\gamma}} \cdot \left(\frac{\gamma}{1+r}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}} \tag{2}$$

0,5 pts. Teniendo estos valores, podremos calcular el ingresos en el periodos 0 (*ex-post* realizada la inversión) y el ingreso en el periodo 1:

$$\boxed{\therefore \quad Y_0 = DI - I_0^* = DI - I_0^* = DI - \left(\frac{A \cdot \gamma}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}} \tag{3}$$

Para el periodo 1 como no existen ingresos fuera del retorno que genera la inversión, estas se igualan llegando a:

$$\boxed{Y_1^* = A^{\frac{1}{1-\gamma}} \cdot \left(\frac{\gamma}{1+r}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}} \tag{4}$$

Teniendo la inversión y los ingresos de los periodos, tendremos que el individuo hará las decisiones de consumo para lo cual tenemos que tener en cuenta que el valor presente de nuestro ingreso tiene que ser igual al valor presente de nuestro consumo, para que de esta forma el individuo sea racional y no tenga recursos ocioso (se cumple fuentes = uso), por lo que nuestra reestricción intertemporal sera:

$$\underbrace{\overbrace{Y_0 + \frac{Y_1}{1+r}}^{w_0}}_{\text{VP Ingresos}} = \underbrace{C_0 + \frac{C_1}{1+r}}_{\text{VP Consumo}}$$

Teniendo la reestricción de flujos, tendremos de que el individuo maximizará:

$$\max_{\{C_0, C_1\}} U(C_0, C_1) = C_0^{\alpha} \cdot C_1^{\beta}$$

$$S.a \quad Y_0 + \frac{Y_1}{1+r} = C_0 + \frac{C_1}{1+r}$$

Existen varias maneras de resolver este problema, no obstante nosotros plantearemos el *Lagrangeano* de la forma:

$$\mathcal{L} = \underbrace{C_0^{\alpha} \cdot C_1^{\beta}}_{U(C_0, C_1)} + \lambda \cdot \left(Y_0 + \frac{Y_1}{1+r} - C_0 - \frac{C_1}{1+r} \right)$$

Las CPOs vendrán dados por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_0}|_{C_0 = C_0^*} = 0 \longrightarrow \alpha \cdot C_0^{\alpha - 1} \cdot C_1^{\beta} = \lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1}|_{C_1 = C_1^*} = 0 \longrightarrow \beta \cdot C_1^{\beta - 1} \cdot C_0^{\alpha} = \frac{\lambda}{1+r}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \longrightarrow Y_0 + \frac{Y_1}{1+r} = C_0 + \frac{C_1}{1+r}$$

Dividiendo las 2 primeras expresiones, tendremos de que la relación de sustitución óptima del consumo estará dada por:

$$\boxed{C_0^* = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot \frac{C_1^*}{1+r}} \tag{5}$$

Si reemplazamos esta última relación en la reestricción presupuestaria llegamos a:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot \frac{C_1^*}{1+r} + \frac{C_1}{1+r} = Y_0 + \frac{Y_1}{1+r}$$

$$\boxed{\therefore \quad C_1^* = \left(\frac{\beta \cdot (1+r)}{\alpha + \beta}\right) \cdot \underbrace{\left(Y_0 + \frac{Y_1}{1+r}\right)}_{= w_0}} \quad 0,75 pts. \tag{6}$$

Reemplazamos esta solución en 5 llegando a:

$$\boxed{C_0^* = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) \cdot \underbrace{\left(Y_0 + \frac{Y_1}{1+r}\right)}_{= w_0}} \quad 0,75 pts. \tag{7}$$

Con tenerlos hasta este punto se le otorgaba todo el puntaje, si el estudiante desarrolló la expresión de los consumos reemplazando los ingresos obtenidos con anterioridad se le otorgan la misma cantidad de puntos. Además se considerará lo siguiente:

- Si solo se coloca el equilibrio dado por 5, se le otorga 0,25 pts.

b) ¿Presta o pide prestado en el periodo 0? (2 pts).

Respuesta

Para saber si el individuo presta o pide prestado, necesitamos saber si el consumo más la inversión es mayor a las dotaciones iniciales, si:

$C_0 > \underbrace{D.I - I_0}_{Y_0}$ El individuo pide prestado.

$C_0 < \underbrace{D.I - I_0}_{Y_0}$ El individuo presta.

$C_0 = \underbrace{D.I - I_0}_{Y_0}$ El individuo no presta ni pide prestado.

Para ver en qué posición se encuentra el individuo, tendríamos que conocer los valores.

Consideraciones: Basta con colocar las primeras 2 condiciones para obtener todo el puntaje, en caso de colocar una de las dos se le otorgará 1pt. Finalmente, si se especifica únicamente que se necesita conocer los parámetros se otorga 1 pt.

c) Suponga ahora que $r = 10\,\%$; que la dotación inicial (DI) es de 110; $\alpha = \beta = 1$; que $\gamma = 0,5$ y A=20; reemplace y obtenga a) y b). (2 pts).

Respuesta

Reemplazando los valores, encontramos de que:

- $I_0^* = \$82,64$.(0,2 pts).
- $Y_0^* = \$27,36$.(0,2 pts).
- $Y_1^* = F_1^* = \$181,82$.(0,2 pts).
- $C_0^* = \$96,32$.(0,2 pts).
- $C_1^* = \$105,95$.(0,2 pts).

Para ver si el individuo presta o pide prestado, podemos utilizar la relación en el inciso anterior para darnos cuenta de que $C_0^* > Y_0^*$, por lo tanto el individuo pide prestado \$68,97 y paga el próximo periodo $\$68,97 \cdot (1,1) = \$75,86$.(1 pt).